

Вопросы к экзамену по курсу “Методы теоретической физики” для студентов IV курса ФИВТ

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, часть 1

Постулаты

1. Как связаны между собой вектор кет $|\psi\rangle$ и вектор бра $\langle\psi|$?
2. Задано скалярное произведение двух векторов состояния $C = \langle\varphi|\psi\rangle$. Чему равно $\langle\psi|\varphi\rangle$?
3. Пусть $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$. Какой смысл имеют коэффициенты c_1 и c_2 в суперпозиции $|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$?
4. Задан вектор состояния в виде суперпозиции двух состояний $|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$. Как определяется вектор бра $\langle\psi|$?
5. Задан оператор физической величины \hat{f} . Как определяется наблюдаемая (физическая величина) квантовой системы, находящейся в состоянии $|\psi\rangle$?

Уравнение Шредингера

1. Записать уравнение, которому подчиняется вектор состояния квантовой системы.
2. Записать стационарное уравнение Шредингера. Какой вид имеет оператор Гамильтона в общем случае?
3. Записать волновую функцию свободной нерелятивистской частицы.
4. Как с помощью оператора эволюции записать решение уравнения Шредингера в произвольный момент времени, если задано начальное условие $\Psi(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \psi_0(\mathbf{r})$?
5. Какой вид имеет оператор эволюции консервативной системы?
6. Записать определение производной оператора по времени.
7. Как определяется коммутатор двух операторов?
8. Какому условию удовлетворяют операторы физических величин–интегралов движения в квантовой механике?
9. Какие физические величины могут быть включены в полный набор физических величин, определяющих состояние квантовой системы?
10. Как можно представить коммутатор $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]$?
11. Определить полный набор физических величин свободной бесспиновой частицы.

Операторы и теория представлений

1. Чему равен (“табличный”) коммутатор $[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta]$?
2. Зная табличный коммутатор операторов координаты и импульса, определить оператор скорости нерелятивистской частицы.
3. Как можно записать оператор, соответствующий физической величине \mathbf{pr} ?
4. Что определяет выражение $\langle\mathbf{r}|\Psi\rangle = ?$
5. Для оператора координаты $\hat{\mathbf{r}}|\mathbf{r}_0\rangle = ?$
6. Для оператора импульса $\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{p}_0\rangle = ?$
7. Пусть совокупность векторов $|n\rangle$ -составляет базис. Чему равен оператор $\sum_n |n\rangle\langle n| = ?$
8. Для некоторого (не обязательно эрмитова) оператора $\hat{f}|f_n\rangle = f_n|f_n\rangle$, чему равно $\langle f_n|\hat{f} = ?$
9. Пусть $\hat{f}^+ = \hat{f}$, а $\hat{f}|f_n\rangle = f_n|f_n\rangle$, чему равен оператор $\sum_n |f_n\rangle\langle f_n| = ?$

12. $\langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle = ?$
13. Записать волновую функцию свободной нерелятивистской частицы.
14. $\langle \mathbf{r}' | \mathbf{r} \rangle = ?$
15. $\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = ?$
16. Записать уравнение Шредингера для частицы с массой m в координатном представлении.
17. Записать стационарное уравнение Шредингера для частицы с массой m в импульсном представлении.

Основные коммутационные соотношения

1. Чему равен коммутатор $[\hat{p}_x, \hat{x}]$?
2. Чему равен коммутатор $[\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta]$?
3. Чему равен коммутатор $[\hat{\mathbf{p}}, U(\mathbf{r})]$?
4. Чему равен коммутатор $[\hat{l}_x, \hat{l}_y]$?
5. Чему равен коммутатор $[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta]$?
6. Чему равен коммутатор $[\hat{l}_\alpha, \hat{\mathbf{l}}^2]$?
7. Чему равен коммутатор $[\hat{l}_z, \hat{l}_\pm]$?
8. Чему равен коммутатор $[\hat{l}_z, \hat{l}_\mp]$?

Граничные условия

1. Как формулируются граничные условия для нахождения связанных состояний?
2. Как формулируются граничные условия для задач непрерывного спектра?

Осциллятор

1. Записать гамильтониан линейного гармонического осциллятора.
2. Как определяются осцилляторные единицы энергии, длины, импульса?
3. Записать определение операторов a и a^+ через операторы координаты и импульса.
4. Выразить операторы координаты и импульса через операторы a и a^+ .
5. Чему равен коммутатор $[a, a^+] = ?$
6. Записать выражение гамильтониана осциллятора через a и a^+ .
7. Как определяется спектр осциллятора?
8. Записать полный набор квантовых чисел, определяющих состояния одномерного гармонического осциллятора. Какие значения могут принимать квантовые числа?
9. Чему равен результат действия оператора $a|n\rangle = ?$
10. Чему равно $a^+|n\rangle = ?$
11. Чему равно $a|0\rangle = ?$
12. Выразить произвольное состояние осциллятора $|n\rangle$ через основное состояние $|0\rangle$.
13. Какой вид имеет волновая функция основного состояния осциллятора $\psi(q) =$ (в безразмерных единицах)?

Момент

1. Выразить $\hat{\mathbf{l}}^2$ через \hat{l}_z и \hat{l}_\pm .
2. $\hat{\mathbf{l}}^2|l, m\rangle = ?$
3. $\hat{l}_z|l, m\rangle = ?$
4. $\hat{l}_+|l, l\rangle = ?$
5. $\hat{l}_-|l, -l\rangle = ?$
6. $\hat{l}_\pm|l, m\rangle = ?$

Центральное поле

1. Как определяется полный набор физических величин бесспиновой частицы в центральном поле?
2. Как разделяются переменные в волновой функции, описывающей состояние частицы в центральном поле $\Psi(\mathbf{r}) = ?$
3. Асимптотическое поведение радиальной функции связанного состояния $R_{nl}(r) |_{r \rightarrow \infty} \sim ?$

7. Как определяется атомная система единиц?
8. Записать полный набор и значения, которые могут принимать квантовые числа, определяющие состояние атома водорода.
9. Записать спектр атома водорода и определить кратность вырождения уровней энергии.
10. Какой вид имеет волновая функция основного состояния атома водорода $\psi_0(\mathbf{r}) = ?$

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, часть 2

Квазиклассика

1. Представление волновой функции частицы через квантовое действие.
2. Уравнение для квантового действия (консервативной системы)
3. Разложение квантового действия по степеням \hbar .
4. Уравнение для квантового действия в одномерном случае.
5. Уравнение для определения нулевого приближения квантового действия. Выражение для квазиклассического импульса.
6. Критерий применимости квазиклассического приближения.
7. Общий вид волновой функции квазиклассического приближения в классически разрешенной области.
8. Возможные постановки задачи в квазиклассическом приближении.
9. Точки поворота (определение).
10. Правило квантования Бора-Зоммерфельда для определения энергетического спектра связанных состояний.
11. Определение квазиклассического периода.
12. Нормировка волновой функции связанного состояния в квазиклассическом приближении.
13. Плотность энергетического спектра связанных состояний в квазиклассическом приближении.
14. Постановка задачи о проникновении частицы через потенциальный барьер.
15. Вероятность проникновения через потенциальный барьер.

Стационарная теория возмущений

1. Формулировка задачи стационарной теории возмущений.
2. Критерий применимости теории возмущений.
3. Поправка первого порядка к уровням энергии для невырожденного спектра.
4. Поправки к состояниям невырожденного спектра в первом порядке теории возмущений.
5. Поправка второго порядка к уровням энергии для невырожденного спектра.
6. Как изменится энергия основного невырожденного уровня системы, при помещении ее во внешнее поле?
7. Постановка стационарной теории возмущений в случае вырожденного энергетического спектра.
8. Правильные функции нулевого приближения и секулярное уравнение в теории возмущений.
9. Уравнение для определения функции Грина стационарного уравнения Шредингера.
10. Определение функции Грина стационарного уравнения Шредингера как представление оператора.
11. Ряд теории возмущений для функции Грина стационарного уравнения Шредингера.
12. Что определяют полюса функции Грина стационарного уравнения Шредингера?
13. Функция Грина в энергетическом представлении.
14. Выражение для поправок к состояниям в теории возмущений с помощью функции Грина.
15. Выражение для поправок к уровням энергии в теории возмущений с помощью функции Грина.
16. Функция Грина стационарного уравнения Шредингера в координатном представлении для дискретного спектра.
17. Функция Грина стационарного уравнения Шредингера в случае непрерывного спектра.

19. Основное интегральное уравнение для определения волновой функции в случае непрерывного спектра.
20. Асимптотический вид волновой функции в задаче о рассеянии.
21. Определение дифференциального сечения рассеяния и его связь с амплитудой рассеяния.
22. Борновское приближение в теории рассеяния.
23. Критерий применимости борновского приближения для рассеяния медленных частиц.
24. Критерий применимости борновского приближения для рассеяния быстрых частиц.
25. Как зависит от углов дифференциальное сечение рассеяния медленных частиц в борновском приближении?
26. Особенности угловой зависимости дифференциального сечения рассеяния быстрых частиц в борновском приближении.

Нестационарная теория возмущений

1. Как зависит от времени вектор состояния квантовой системы в представлении Гайзенберга?
2. Как зависит от времени оператор в представлении Гайзенберга?
3. Как определяется вектор состояния квантовой системы в представлении взаимодействия?
4. Уравнения Шредингера в представлении взаимодействия.
5. Итерационный ряд для определения состояния в нестационарной теории возмущений, T – ехр.
6. Общее выражения вероятности перехода в нестационарной теории возмущений.
7. Выражение вероятности перехода в первом порядке нестационарной теории возмущений.
8. Критерий применимости нестационарной теории возмущений.
9. Соотношение неопределенностей для энергии и времени.
10. Определение вероятности перехода в непрерывном спектре.
11. Вероятность перехода в единицу времени, “золотое правило” Ферми.
12. Понятие квазистационарного состояния, ширина уровня.
13. Поправка второго порядка к уровню энергии в непрерывном спектре и ее связь с шириной уровня квазистационарного состояния.
14. Связь ширины уровня квазистационарного состояния и вероятности перехода в единицу времени в непрерывном спектре.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, часть 3

Многочастичная теория

1. Как можно записать вектор состояния системы, состоящей из двух не взаимодействующих подсистем, находящихся в состояниях $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$?
2. Замкнутая система состоит из двух не взаимодействующих подсистем, обладающих моментами l_1 и l_2 соответственно. Сколько линейно независимых векторов определяют состояния с определенным суммарным моментом?
3. Замкнутая система состоит из двух не взаимодействующих подсистем, обладающих моментами l_1 и l_2 соответственно. Какими квантовыми числами определяется состояние системы с заданным суммарным моментом L ? Записать дираковский вектор состояния.
4. Какие значения может принимать суммарный момент L системы двух подсистем, обладающих моментами l_1 и l_2 соответственно?
5. Пусть $\mathbf{L} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$. Показать, что коммутатор $[\hat{L}_z, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0$.
6. Как с помощью коэффициентов Клебша-Гордана определить состояние системы с полным моментом J , если известны состояния подсистем $|j_1, m_1\rangle$ и $|j_2, m_2\rangle$?
7. Чем равно выражение $\sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle \langle j, m | j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle$?

9. В каком виде можно представить состояние N связанных гармонических осцилляторов?
10. В каком виде можно представить гамильтониан системы связанных гармонических осцилляторов?
11. Как определяется спектр системы связанных гармонических осцилляторов?
12. Как с помощью повышающих операторов можно получить произвольное состояние системы гармонических осцилляторов из основного?
13. Пусть $\Psi(x_1, x_2; t)$ волновая функция системы двух тождественных частиц, чему равен результат действия на нее оператора перестановки частиц $\hat{P}\Psi(x_1, x_2; t) = ?$
14. В каком виде можно записать гамильтониан системы двух взаимодействующих тождественных частиц?
15. Как для системы двух ферми-частиц связаны между собой волновые функции $\Psi(x_1, x_2; t)$ и $\Psi(x_2, x_1; t)$?
16. Как для системы двух бозе-частиц связаны между собой волновые функции $\Psi(x_1, x_2; t)$ и $\Psi(x_2, x_1; t)$?
17. В каком виде можно представить вектор состояния системы N невзаимодействующих тождественных частиц? Как определяется полный набор квантовых чисел?
18. Как можно записать волновую функцию N невзаимодействующих ферми-частиц?
19. Как можно записать волновую функцию N невзаимодействующих бозе-частиц?
20. Для системы двух невзаимодействующих ферми-частиц записать волновую функцию с определенным суммарным спином S .
21. Для системы двух невзаимодействующих бозе-частиц записать волновую функцию с определенным суммарным спином S .
22. Записать спиновые векторы состояния системы двух электронов, обладающих суммарным спином $S = 1$.
23. Записать спиновый вектор состояния системы двух электронов, обладающих суммарным спином $S = 0$.
24. Система двух электронов находится в спиновом состоянии, которое описывается вектором $|+\rangle|+\rangle$. Построить вектор состояния $|S = 1, M_S = 0\rangle$, описывающий состояние с суммарным спином $S = 1$.
25. Система двух электронов находится в спиновом состоянии, которое описывается вектором $|+\rangle|-\rangle$. Представить его в виде суперпозиции состояний с определенным суммарным спином S .
26. Координатная часть волновой функции двух электронов имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n_1}(\mathbf{r}_1)\psi_{n_2}(\mathbf{r}_2) - \psi_{n_1}(\mathbf{r}_2)\psi_{n_2}(\mathbf{r}_1))$. Чему равен суммарный спин S ?
27. Координатная часть волновой функции двух электронов имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n_1}(\mathbf{r}_1)\psi_{n_2}(\mathbf{r}_2) + \psi_{n_1}(\mathbf{r}_2)\psi_{n_2}(\mathbf{r}_1))$. Чему равен суммарный спин S ?
28. Как определяется обменный интеграл для двух слабо взаимодействующих между собой электронов?

30. Записать результат действия оператора уничтожения на вектор N -частичного состояния тождественных ферми-частиц $\hat{a}(\varphi)|\psi_1, \dots, \psi_N\rangle = ?$
31. Записать результат действия оператора уничтожения на вектор N -частичного состояния тождественных бозе-частиц $\hat{a}(\varphi)|\psi_1, \dots, \psi_N\rangle = ?$
32. Чему равен коммутатор для системы тождественных бозе-частиц $\hat{a}^+(\varphi_1)\hat{a}^+(\varphi_2) - \hat{a}^+(\varphi_2)\hat{a}^+(\varphi_1)$?
33. Чему равен коммутатор для системы тождественных бозе-частиц $\hat{a}(\varphi_1)\hat{a}(\varphi_2) - \hat{a}(\varphi_2)\hat{a}(\varphi_1)$?
34. Чему равен коммутатор для системы тождественных бозе-частиц $\hat{a}(\varphi_1)\hat{a}^+(\varphi_2) - \hat{a}^+(\varphi_2)\hat{a}(\varphi_1)$?
35. Чему равен антикоммутатор для системы тождественных ферми-частиц $\hat{a}^+(\varphi_1)\hat{a}^+(\varphi_2) + \hat{a}^+(\varphi_2)\hat{a}^+(\varphi_1)$?
36. Чему равен антикоммутатор для системы тождественных ферми-частиц $\hat{a}(\varphi_1)\hat{a}(\varphi_2) + \hat{a}(\varphi_2)\hat{a}(\varphi_1)$?
37. Чему равен антикоммутатор для системы тождественных ферми-частиц $\hat{a}(\varphi_1)\hat{a}^+(\varphi_2) + \hat{a}^+(\varphi_2)\hat{a}(\varphi_1)$?
38. Чему равен антикоммутатор для системы тождественных ферми-частиц $\hat{a}_{\mathbf{p}_1, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \sigma'}^+ + \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \sigma'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \sigma}$, где $|\mathbf{p}, \sigma\rangle$ – состояние с определенным импульсом и проекцией спина?
39. Чему равен коммутатор для системы тождественных бозе-частиц $\hat{a}_{\mathbf{p}_1, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \sigma'}^+ - \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \sigma'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \sigma}$, где $|\mathbf{p}, \sigma\rangle$ – состояние с определенным импульсом и проекцией спина?
40. Для системы тождественных бозе-частиц определить результат действия оператора рождения на вектор состояния в пространстве чисел заполнения $a_\beta^+ |n_1, n_2, \dots\rangle = ?$
41. Для системы тождественных бозе-частиц определить результат действия оператора уничтожения на вектор состояния в пространстве чисел заполнения $a_\beta |n_1, n_2, \dots\rangle = ?$
42. Какой смысл имеет оператор $a_\beta^+ a_\beta$, действующий в пространстве чисел заполнения?
43. Чему равно действие оператора $\sum_\beta a_\beta^+ a_\beta$ на вектор состояния в пространстве чисел заполнения?
44. Для системы тождественных ферми-частиц определить результат действия оператора рождения на вектор состояния в пространстве чисел заполнения $a_\beta^+ |n_1, n_2, \dots\rangle = ?$
45. Для системы тождественных ферми-частиц определить результат действия оператора уничтожения на вектор состояния в пространстве чисел заполнения $a_\beta |n_1, n_2, \dots\rangle = ?$
46. Для системы тождественных ферми-частиц выразить оператор $a_\alpha a_\alpha^+$ через оператор числа частиц \hat{N}_α в состоянии $|\alpha\rangle$.
47. Для системы бозе-частиц определить среднее значение оператора $\hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\beta$.
48. Для системы бозе-частиц определить среднее значение оператора $\hat{a}_\beta \hat{a}_\beta^+$.
49. Для системы ферми-частиц определить среднее значение оператора $\hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\alpha$.
50. Для системы ферми-частиц определить среднее значение оператора $\hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha^+$.

52. Чему равен антикоммутатор полевых операторов для системы тождественных ферми-частиц $\hat{\psi}(\mathbf{r}')\hat{\psi}^+(\mathbf{r}) + \hat{\psi}^+(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}')$?
53. Записать полевой оператор $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ через операторы уничтожения a_n состояний дискретного базиса $\varphi_n(\mathbf{r})$.
54. Записать полевой оператор $\hat{\psi}^+(\mathbf{r})$ через операторы рождения a_n^+ состояний дискретного базиса $\varphi_n(\mathbf{r})$.
55. Выразить оператор плотности частиц $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ через полевые операторы.
56. Выразить оператор числа частиц \hat{N} через полевые операторы.
57. Записать полевой оператор $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ через операторы уничтожения $a_{\mathbf{p},\sigma}$ в базисе состояний свободных частиц.
58. Записать полевой оператор $\hat{\psi}^+(\mathbf{r})$ через операторы рождения $a_{\mathbf{p},\sigma}^+$ в базисе состояний свободных частиц.
59. Записать операторы уничтожения $a_{\mathbf{p},\sigma}$ через полевые операторы $\hat{\psi}(\mathbf{r})$.
60. Записать одночастичный оператор в представлении чисел заполнения.
61. Записать оператор двухчастичного взаимодействия в представлении чисел заполнения.
62. Записать гамильтониан системы тождественных частиц в представлении чисел заполнения в собственном базисе.

Магнитные взаимодействия

1. Для заряженной частицы записать связь оператора кинематического импульса с обобщенным.
2. Связь оператора магнитного момента со спином частицы.
3. Записать гамильтониан Паули системы заряженных частиц.
4. Преобразование волновой функции частицы при калибровочном преобразовании потенциалов.
5. Записать оператор взаимодействия системы заряженных частиц с электромагнитным полем.
6. Какой вид имеет оператор взаимодействия системы заряженных частиц с однородным магнитным полем?
7. В каком виде можно представить оператор спин-орбитального взаимодействия заряженной частицы в центральном поле? Каков порядок этого взаимодействия по сравнению с атомной?
8. Оценить порядок величины сверхтонкого взаимодействия в атоме водорода.
9. Как определяется гамильтониан свободного электромагнитного поля?
10. Чему равен коммутатор операторов рождения и уничтожения для свободного электромагнитного поля $[a_{\mathbf{k},\alpha}, a_{\mathbf{k},\beta}^+] = ?$
11. Запишите энергетически спектр свободного электромагнитного поля.
12. Как можно определить произвольное состояние свободного электромагнитного поля из основ-

13. Оценить порядок величины электрического дипольного взаимодействия системы зарядов со свободным электромагнитным полем.
14. Как определяется время жизни системы зарядов в возбужденном состоянии в электрическом дипольном приближении?
15. Оценить время жизни свободного атома в возбужденном состоянии в электрическом дипольном приближении.

Матрица плотности

1. Как, зная матрицу плотности системы, определить среднее значения оператора физической величины?
2. В каком виде всегда можно представить матрицу плотности чистого состояния?
3. Для матрицы плотности $\text{Tr} \rho = ?$
4. В каком случае $\text{Tr} \rho^2 = 1$?
5. В каком виде всегда можно представить матрицу плотности смешанного состояния?
6. Для матрицы плотности определить связь ρ^\dagger и ρ .
7. Какой физический смысл имеют диагональные элементы матрицы плотности?
8. Записать уравнение Лиувилля для эволюции матрицы плотности.
9. Записать формальное решение уравнения Лиувилля с помощью оператора эволюции.
10. Записать уравнение Лиувилля для матрицы плотности в матричной форме.
11. Определение энтропии системы с помощью матрицы плотности.
12. Какой вид имеет равновесная матрица плотности малого канонического ансамбля?
13. Зная равновесную матрицу плотности малого канонического ансамбля, записать определение его энергии.